Ing. Horacio Salvañá
HS Ingeniería - www.hsingenieria.com.ar
Río Grande – Tierra del Fuego
MN: 10212 MP(TdF):0054

Valor Eficaz

Objetivo

Este trabajo tiene como finalidad brindar herramientas matemáticas para el cálculo de Valores Eficaces considerando distintos escenarios que se presentan frecuentemente. Estas herramientas permiten llevar el análisis de fallas más allá del primer ciclo. Podrán observar que en algunos desarrollos la simbología utilizada no es la encontrada habitualmente en otros textos técnicos, esto se debe a que se tomaron denominaciones cómodas para el desarrollo de las integrales y la facilidad de aplicación en planillas de cálculo.

Introducción

Ante todo debemos recordar que por definición el Valor Eficaz de una Corriente es "una corriente continua que produce el mismo efecto térmico sobre un elemento resistivo de un circuito". Es decir que es una igualdad en términos de energía:

Energía de una I equivalente = Energía de la $i(t)$ en cuestión

Cuando analizamos una falla en un sistema eléctrico además de otros parámetros importantes, es interesante determinar el Valor Eficaz de la corriente en cuestión ya que nos da una idea del daño térmico que puede causar.

Enunciándolo en términos matemáticos tenemos:

$$\int_0^T P dt = \int_0^T p_{(t)} dt$$

Desarrollando

$$\int_0^T I^2 R dt = \int_0^T i^2{}_{(t)} R dt \quad \rightarrow \quad I^2 R \int_0^T dt = R \int_0^T i^2{}_{(t)} dt$$

Simplificando R y resolviendo la integral del primer término:

$$I^2 T = \int_0^T i^2{}_{(t)} dt$$

Quedando finalmente $\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2{}_{(t)}dt}}$

En la mayoría de los casos necesitamos calcular el Valor Eficaz correspondiente a un ciclo, es decir que para un sistema de frecuencia de 50 Hz debemos considerar T = 20 ms. También es válido trabajar en términos de ángulo, ya sea en radianes o grados.

Normalmente es suficiente tomar como origen de tiempo un tiempo t = 0 ms, caso contrario el intervalo de integración debería ser T1-T2.

Ahora analizaremos distintos casos.

Valor Eficaz de $i_{(t)} = A \cdot sen(\omega t)$

Este es el caso más conocido, una sinusoide simétrica no amortiguada ni desplazada:

$$i_{(t)} = A \cdot sen(\omega t)$$

Siendo A = Amplitud de la onda de corriente
y ω = frecuencia del sistema. Como estamos trabajando con tiempos del orden de los milisegundos es conveniente expresar ω de la siguiente forma $\omega = \frac{2\pi \cdot 50}{1.000} = \frac{\pi}{10}$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T A^2 \cdot sen^2(\omega t)dt}$$

Esta integral da como resultado:

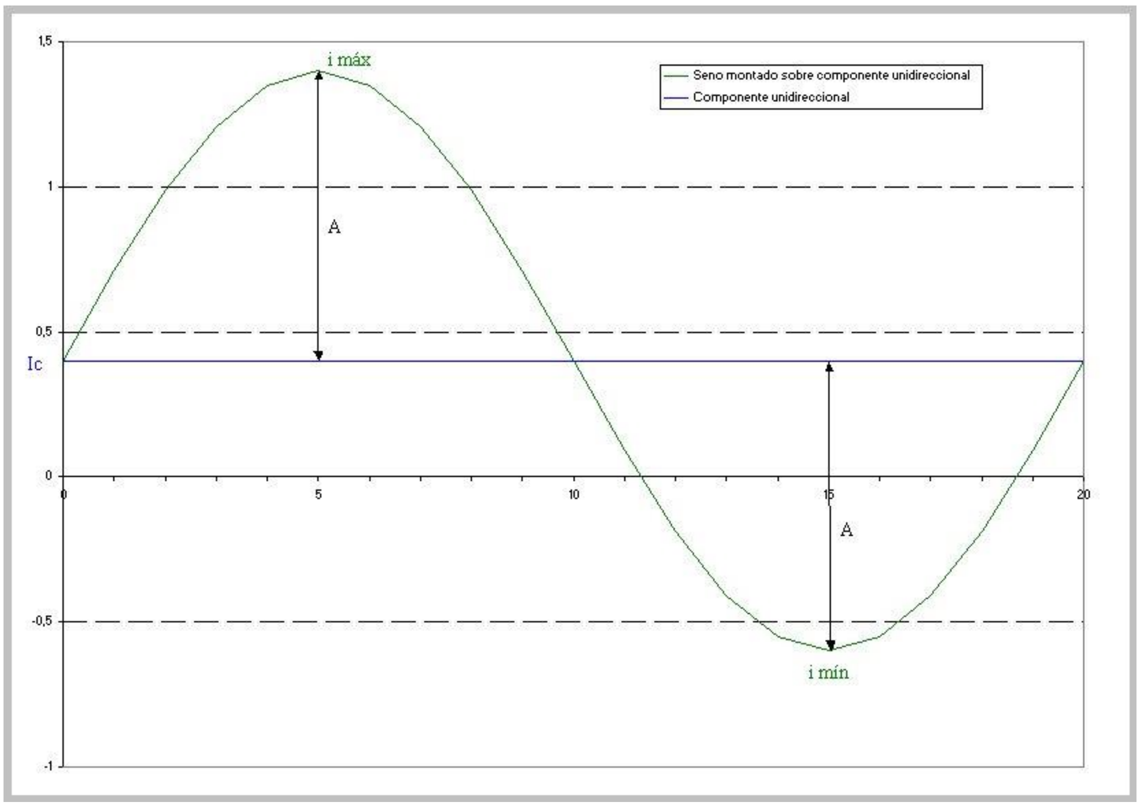
$$\int_0^T A^2 sen^2(\omega t)dt = A^2 \cdot \left| \frac{t}{2} - \frac{sen(\omega t)\cos(\omega t)}{2\omega} \right|_0^T$$

Para el caso de tomar T = Un período = 20 ms o también para N períodos completos

$$\therefore I = \sqrt{\frac{A^2 \cdot T}{T \cdot 2}}$$ quedando la ya conocida $$\boxed{I = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

Valor Eficaz de una onda senoidal montada sobre una componente continua.

Sea el caso de una onda senoidal montada sobre una componente unidireccional, que en este caso al permanecer constante en el tiempo podemos llamarla componente continua. En principio tomaremos I^2 para no arrastrar la raíz cuadrada y luego sacamos la raíz cuadrada del resultado.



$$i_{(t)} = I_c + A \cdot sen(\omega t)$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[I_c + A \cdot sen(\omega t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[I_c^2 + 2 \cdot A \cdot sen(\omega t) + A^2 sen^2(\omega t)\right] dt$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\left(\int_0^T I_c^2 dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot sen(\omega t) dt + \int_0^T A^2 sen^2(\omega t) dt\right)$$

El segundo término se hará cero ya que es la integral del seno en períodos completos.

Resolviendo el resto y utilizando la identidad trigonométrica $sen(2\omega t) = 2\cos(\omega t) sen(\omega t)$

$$I^2 = \frac{1}{T}\left| I_c^2 t + A^2\left(\frac{t}{2} + \frac{sen(2\omega t)}{4\omega}\right)\right|_0^T = \frac{1}{T}\left(I_c^2 T + A^2 \frac{T}{2}\right)$$

$I^2 = I_c^2 + \frac{A^2}{2}$ quedando finalmente $\boxed{I = \sqrt{I_c^2 + \frac{A^2}{2}}}$

Observen que estamos en presencia de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de la componente continua y de onda senoidal que puede tomarse como la superposición de “efectos térmicos” y no como la suma de valores eficaces, ya que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Cuando encontramos este caso en un oscilograma podemos tomar:

$$A = \frac{|i_{mín}| + |i_{máx}|}{2} \quad ; \quad I_c = A - |i_{mín}|$$

Pudiendo con estos dos valores encontrar fácilmente el valor de ***I*** utilizando la fórmula anterior.

Valor Eficaz de una onda senoidal Simétrica Amortiguada.

Se propone como función la siguiente:

$$i_{(t)} = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot sen(\omega t)$$

Debe tenerse en cuenta que esta función es válida para el análisis de perturbaciones en el período subtransitorio y transitorio. No podemos extendernos al régimen permanente ya que para los valores de ***t*** que nos ubican dentro del régimen permanente $i_{(t)}$ es prácticamente cero.

Dada esta función, considerando un intervalo [0–T] y prescindiendo de los pasos matemáticos tenemos:

$$\boxed{I = \frac{A.\omega}{2}\sqrt{\frac{1-e^{-2\alpha T}}{\alpha.T\left(\alpha^2+\omega^2\right)}}}$$

Con validez para T equivalente a períodos completos.

Ahora bien, aquí puede surgir la duda de cómo determinar el valor de *α*, este valor está dado en una primera aproximación por:

$$\alpha = \frac{X_{Tot}}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_{Tot}}$$

Siendo X_{Tot} y R_{Tot} la reactancia y la resistencia totales desde la fuente (inclusive) hasta el punto de defecto.
f = frecuencia de línea.

Líneas arriba se aclara que la obtención de *α* está dada en forma aproximada, esto se debe a dos motivos principales:

1.- que habitualmente las X y las R se calculan en forma simplificada, por ejemplo, no se toman en cuenta las reactancias transversales.

2.- que las formas de onda que surgen durante los defectos no son modelizables matemáticamente en forma perfecta, sino que se toman ecuaciones generalizadoras, es decir que se aproximen al fenómeno físico que queremos representar o estudiar.

Valor Eficaz de una onda senoidal Asimétrica Amortiguada.

En este caso además de tener un amortiguamiento de la sinusoide tenemos una componente unidireccional que se amortigua en el tiempo, por lo tanto modelamos el fenómeno con la siguiente función:

$$i_{(t)} = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot sen(\omega t) + U \cdot e^{-\lambda t}$$

Siendo U la amplitud inicial de la componente unidireccional. Esta amplitud depende del ángulo en que se encuentra la onda de la tensión en el momento de la perturbación y del ángulo de fase Tensión-Corriente (φ) durante el período de análisis del defecto.

Y siendo λ la constante de amortiguamiento. Como aproximación podemos tomar $\lambda = \alpha$.

En este punto cabe recordar que el objetivo de este artículo es brindar al lector herramientas matemáticas, por lo que sería ilógico omitir el material que se expone a continuación, pero quien lo desee puede saltearlo y remitirse al apartado **Herramientas de Cálculo**

Una vez más nos limitamos al análisis de Períodos Completos, esto simplifica el resultado de las integrales, ya que no se incluyen los senos y cosenos que, en caso contrario, se deberían “arrastrar”.

Si recordamos el análisis inicial, el Valor Eficaz de una corriente $i(t)$ es la raíz cuadrada de la integral de $i^2(t)$ sobre T, siendo T el tiempo considerado. Ahora bien, desarrollando $i^2(t)$ obtenemos 3 términos que deben ser integrados, a las integrales resultantes de estos términos las denominaremos K, L y M, finalmente a estas integrales las sumaremos, las dividimos por T y extraemos la raíz cuadrada.

$$K = \frac{A^2 \cdot \omega^2 (1 - e^{-2\alpha T})}{4 \cdot \alpha \cdot (\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$L = \frac{A \cdot U \cdot \omega \cdot (2 - e^{-(\alpha+\gamma) T})}{(\alpha+\gamma)^2 + \omega^2}$$

$$M = \frac{U^2 \cdot (1 - e^{-2\gamma T})}{2 \cdot \gamma}$$

Quedando $I = \sqrt{\frac{K + L + M}{T}}$

Valor Eficaz de ondas con componentes armónicos.

Para el análisis de estos casos supongamos una función

$$f_{(t)} = g_{(t)} + h_{(t)}$$

Y veamos como quedaría su hipotético Valor Eficaz

$$F = \sqrt{\frac{\int_0^T (g_{(t)} + h_{(t)})^2 dt}{T}} = \sqrt{\frac{\int_0^T g^2{}_{(t)} dt + 2\int_0^T g_{(t)} h_{(t)} dt + \int_0^T h^2{}_{(t)} dt}{T}}$$

$$F = \sqrt{G^2 + H^2 + \frac{2\int_0^T g_{(t)} h_{(t)} dt}{T}}$$

Como vemos, para poder aplicar la raíz de la suma de cuadrados de los valores eficaces, se debe cumplir la condición:

$$\int_0^T g_{(t)} h_{(t)} dt = 0$$

Centrándonos en el caso de ondas con armónicos esa integral sería:

$\int_0^T A_1 \cdot sen(\omega t) A_N \cdot sen(N\omega t) dt$ que se resuelve aplicando la identidad de Euler para el seno y da como resultado cosenos valorados en períodos completos que son iguales a cero, por lo que podemos afirmar que es válido para estos casos utilizar

$F = \sqrt{G^2 + H^2}$ o expresado de otra manera:

$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}}$ siendo A_i las amplitudes de las respectivas armónicas incluyendo la fundamental.

Herramientas de Cálculo

Los interesados pueden descargar la planilla de cálculos www.hsingenieria/downloads/Valor_Eficaz1.xls dónde podrán simular distintas situaciones modificando las celdas amarillas.